УДК 517.95

В. К. Романко

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПРАВИЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Исследуется возможность постановки корректных граничных задач для систем дифференциально-операторных уравнений в смысле существования для них правильных операторов Для рассматриваемых классов систем дается эффективное описание правильных операторов в терминах граничных условий. Изучена необходимость накладываемых условий на операторные коэффициенты и правую часть системы уравнений.

Будем рассматривать при $t \in (0, T)$, $0 < T < +\infty$, систему уравнений вида

$$Lu(t) \equiv A(t)u'(t) + B(t)Pu(t) + C(t)u(t) = f(t). \tag{1}$$

Здесь $A(t)$, $B(t)$ и $C(t)$ — заданные квадратные матрицы порядка n, причем $A(t)$, $B(t)$ — ненулевые матрицы $t \in [0, T]$ и либо $\det A(t) \neq 0\ \forall\, t \in [0, T]$, либо $\det A(t) \equiv 0\ \forall\, t \in [0, T]$, $u(t)$, $f(t)$ — вектор-функции с n компонентами со значениями в гильбертовом пространстве H', P — линейный замкнутый неограниченный оператор с плотной в H' областью определения $\mathscr{D}(P)$, не зависящей от $t \in [0, T]$.

Система (1) изучается при условии, что спектр оператора P представляет собой счетное множество Λ его собственных значений $\lambda_k \neq 0$ с единственной предельной точкой $\lambda = \infty$, причем Λ расположено на фиксированной прямой комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Кроме того, предполагается, что собственные элементы φ_k оператора P образуют базис Рисса H'. Широкий класс модельных дифференциальных операторов P с указанными свойствами спектра описаны в [1, 2]. Пусть H — гильбертово пространство вектор-функций с n компонентами из $\mathscr{L}_2([0, T], H')$. Нас интересует вопрос о существовании для системы (1) корректных граничных условий вида

$$\mathscr{M}_1 u(0) + \mathscr{M}_2 u(T) = 0, \tag{2}$$

где $\mathscr{M}_1$ и $\mathscr{M}_2$ — оператор-матрицы порядка $n_1 \times n$ и число $n_1 \in [0, n]$, определяющий для (1) правильный оператор L в H [1], т. е. такой замкнутый оператор L в H, для которого существует ограниченный обратный на всем H и $L_0 \subseteq L \subseteq \tilde{L}$ (L_0 — минимальный, а $\tilde{L}$ — максимальный операторы для (1) в H). Некоторые частные случаи задачи (1), (2) изучены в [2].

Под решением (обобщенным) задачи (1), (2) в дальнейшем понимается $u(t) \in H$, для которой найдется последовательность непрерывно дифференцируемых вектор-функций $u_j(t)$ со значениями в $\mathscr{D}(P)$, удовлетворяющими условиям (2), таких, что $u_j(t) \to u(t)$, $Lu_j(t) \to f(t)$, $j \to \infty$ (сходимость в H).

1. Случай постоянных матриц *A, B, C*. При построении краевых условий (2), определяющих для системы (1) правильный оператор, принципиально различными являются случаи $\det A \neq 0$ и $\det A = 0$. Сначала рассмотрим первый случай. Пусть для простоты $A = E$ — единичная матрица и пусть матричный пучок $(\lambda B + C)$, $\lambda \in \Lambda$, невырожденной матрицей $Q(\lambda)$ приводится к жордановой форме $J(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$. Для $u(t) \in H$ определим оператор-матрицу Q^{-1} по формулам

$$u(t) = \sum_k \varphi_k u_k(t), \quad Q^{-1} u(t) = \sum_k \varphi_k Q^{-1}(\lambda_k) u_k(t).$$

Теорема 1. Пусть $A = E$ и пусть для системы (1) произведение норм матриц $Q(\lambda)$, $Q^{-1}(\lambda)$ ограничено на спектре Λ. Тогда решение задачи (1), (2), где $\mathscr{M}_1 = \mu Q^{-1}$, $\mathscr{M}_2 = Q^{-1}$ и число $\mu \neq 0$ — подходяще выбранный параметр, при $\forall f(t) \in H$ существует, единственно и с некоторой постоянной $c_1 > 0$ удовлетворяет оценке

$$\| u(t) \|_H \leqslant c_1 \| f(t) \|_H.$$

Метод доказательства теоремы 1 и всех последующих теорем основан на разложении $u(t)$, $f(t)$ в ряды по собственным элементам φ_k, получении равномерных по k оценок коэффициентов разложения $u_k(t)$ через $f_k(t)$ и использовании спектральных свойств оператора P.

Замечание. Если $C = 0$, то условие теоремы 1 равносильно тому, что каждое собственное значение θ матрицы B, для которого $\operatorname{Re}(\lambda_k \theta)$ имеет на Λ бесконечное подмножество точек уровня, имеет собственную кратность, равную его алгебраической кратности, т. е. в жордановой форме B имеются для таких θ лишь жордановы клетки первого порядка. Если, например, все числа θ простые, то матрица Q постоянна и условие теоремы 1 выполнено.

Рассмотрим теперь минимальный оператор L_0 для (1), т. е. замкнутый оператор в H, порожденный системой (1) и краевыми условиями

$$u(0) = u(T) = 0. \tag{3}$$

Теорема 2. Если $A = E$ и не выполнено условие теоремы 1, то оператор L_0 для системы (1) имеет неограниченный обратный в H.

При доказательстве теоремы 2 строится последовательность правых частей в (1) вида $f_k(t) = \varphi_k \cdot g_k(t)$, для которой решение переопределенной задачи (1), (3) существует, но дает неограниченный в H оператор.

Замечание. При выполнении условий теоремы 2 для системы (1) не существует корректных краевых задач в определенном выше смысле.

Пример 1. Пусть $C = 0$ и пусть $P\varphi(x) = \varphi'(x)$, $x \in (0, 1)$, $\alpha\varphi(0) = \varphi(1)$, $\alpha \neq 0$. При $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ система (1) удовлетворяет условиям теоремы 1, а при $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ система (1) этим условиям не удовлетворяет.

При рассмотрении случая $\det A = 0$ важную роль играет матричный пучок $L(\omega, \lambda) = \omega A + \lambda B + C$, $\omega \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \Lambda$. Пучок $L(\omega, \lambda)$ называется регулярным на множестве Λ, если $\forall \lambda \in \Lambda\ \exists \omega_0 = \omega_0(\lambda)$, такое, что матрица $L(\omega_0, \lambda)$ обратимая. Заметим, что в случае нерегулярного пучка $L(\omega, \lambda)$ матрицы A, B и C необходимо являются вырожденными.

Пусть $n_1 = n_1(\lambda)$ означает число собственных значений $\omega = \omega(\lambda)$ пучка $L(\omega, \lambda)$. В случае $\det A = 0$ и регулярного пучка $L(\omega, \lambda)$ число $n_1(\lambda) \in [0, n-1]$. Если $L(\omega, \lambda)$ — регулярный на Λ пучок, то известно [3], что найдутся обратимые матрицы $Q(\lambda)$ и $R(\lambda)$, приводящие пучок к некоторому каноническому квазидиагональному виду. При этом образ матрицы A будет содержать нильпотентную клетку $J_0(\lambda)$ с индексом $n_0(\lambda) \in [1, n - n_1(\lambda)]$. Пусть $n_0 = \max n_0(\lambda)$ и пусть H^{n_0-1} — гильбертово пространство вектор-функций с n компонентами из $W_2^{n_0-1}([0, T], H')$.

Обозначим через $Q_1^{-1}(\lambda)$ квадратную матрицу порядка n, у которой первые $n_1(\lambda)$ строк берутся из матрицы $Q^{-1}(\lambda)$, а остальные строки нулевые. Введем в H оператор Q_1^{-1} по формулам

$$u(t) = \sum_k \varphi_k u_k(t), \quad Q^{-1}u(t) = \sum_k \varphi_k Q_1^{-1}(\lambda_k)\, u_k(t).$$

Рассмотрим краевое условие

$$\mu Q_1^{-1}u(0) + Q_1^{-1}u(T) = 0, \quad \mu \neq 0. \tag{4}$$

Замечание. При $C = 0$ все числа ω_0, n_1, n_0 и все матрицы Q, R, J_0, Q_1^{-1} являются постоянными.

Теорема 3. Пусть $\det A = 0$. Если матричный пучок $L(\omega, \lambda)$ является регулярным на спектре Λ, произведение норм матриц $Q(\lambda)$, $R(\lambda)$ ограничено на Λ и $f(t) \in H^{n_0-1}$, то решение краевой задачи (1), (4) при некотором выборе параметра μ существует, единственно и с некоторой постоянной $c_2 > 0$ удовлетворяет оценке

$$\|u(t)\|_H \leqslant c_2 \|f(t)\|_{H^{n_0-1}}.$$

При доказательстве теоремы 3 существенно используется тот факт, что решение краевой задачи для коэффициентов $u_k(t)$ разложения $u(t)$ по φ_k, порожденной задачей (1), (4), может быть получено в явном виде с помощью матриц $Q(\lambda)$ и $R(\lambda)$, приводящих пучок $L(\omega, \lambda)$ к каноническому виду для всех $\lambda \in \Lambda$.

Замечание. В ряде случаев неограниченность нормы $R(\lambda)$ на Λ влечет за собой неограниченность нормы $L^{-1}(\omega_0, \lambda)$ или $Q^{-1}(\lambda)$. Условия теоремы 3 являются и необходимыми для существования правильного оператора для (1) в случае $\det A = 0$.

Пример 2. Система (1), у которой $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = 0$ и оператор P такой же, как в примере 1, иллюстрирует необходимость условия $f(t) \in H^{n_0-1}$ для существования решения.

Пример 3. Пусть в (1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = 0$ и P — оператор из примера 1. Тогда пучок $L(\omega, \lambda)$ не является регулярным. Нетрудно убедиться, что в этом случае краевая задача (1), (3) имеет бесконечномерное ядро и не является разрешимой для всякой гладкой $f(t)$.

В случае $\det A = 0$ можно получить аналог теоремы 2.

Теорема 4. Пусть $\det A = 0$, пучок $L(\omega, \lambda)$ является регулярным на спектре Λ и $f(t) \in H^{n_0-1}$. Если произведение норм матриц $Q(\lambda)$, $R(\lambda)$ неограничено на Λ, то минимальный оператор L_0 для системы (1) имеет в H^{n_0-1} неограниченный обратный.

Метод доказательства теоремы 4 такой же, как и теоремы 2, но с использованием приведения пучка $L(\omega, \lambda)$ к каноническому виду.

Следует отметить, что система (1) при возмущении младшей частью вида εC_1, где число $\varepsilon > 0$ и мало, ведет себя принципиально различно в случаях $\det A \neq 0$ и $\det A = 0$. В случае $\det A \neq 0$ система (1) устойчива при добавлении εC_1 с малой нормой $\varepsilon \| C_1 \|$ с точки зрения существования правильного оператора для системы (1). В случае же $\det A = 0$ добавление малой младшей части к (1) существенно влияет на существование правильного оператора для (1), т. е. система (1) неустойчива при возмущении младшей частью. Пусть $C_1 = \| c_{ij} \|$, $i, j = \overline{1, n}$. Если в примере 2 добавить $\varepsilon C_1 = \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & c_{12} \\ c_{21} & 0 \end{pmatrix}$, то для некоторых $\lambda \in \Lambda$ матричный пучок $L(\omega, \lambda)$ не будет регулярным, и значит, для рассматриваемой системы нет правильного оператора в H. Однако этого можно избежать за счет выбора другого оператора рассматриваемого класса.

Прибавление к системе примера 3 члена с εc_{21} сохраняет нерегулярность пучка $L(\omega, \lambda)$ для всякого оператора P, а прибавление члена с εc_{12} делает пучок $L(\omega, \lambda)$ уже регулярным, и соответствующая система допускает существование правильного оператора для всех P. Если же добавлять, например, εc_{33} к системе примера 3, то правильный оператор существует лишь для некоторого подкласса операторов P.

2. Случай переменных матриц $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$.. Пусть сначала $\det A(t) \neq 0 \, \forall \, t \in [0, T]$. Без ограничения общности рассуждений можно считать $A(t) \equiv E$. Рассмотрим матричный пучок $\lambda B(t) + C(t)$, $\lambda \in \Lambda$, и будем предполагать непрерывность матриц $B(t)$, $C(t)$ на $[0, T]$. Обозначим через $\omega_j(t, \lambda)$ собственные значения пучка $\lambda B(t) + C(t)$, $j = \overline{1, n}$.

Теорема 5. Если найдется невырожденная матрица $Q(\lambda)$ для всех $\lambda \in \Lambda$, приводящая пучок $\lambda B(t) + C(t)$ к жордановой форме $J(t, \lambda)$ для всех $t \in [0, T]$, $\lambda \in \Lambda$, знак $\operatorname{Re} \omega_j(t, \lambda)$ не зависит от $t \in [0, T]$ для всех $j = \overline{1, n}$ и произведение норм матриц $Q(\lambda)$, $Q^{-1}(\lambda)$ ограничено на Λ, то решение задачи (1), (2), где $\mathscr{M}_1 = \mu Q^{-1}$, $\mathscr{M}_2 = Q^{-1}$, при подходящем выборе параметра $\mu \neq 0$, для всякой $f(t) \in H$ существует, единственно и с некоторой постоянной $c_3 > 0$ удовлетворяет неравенству

$$\| u(t) \|_H \leqslant c_3 \| f(t) \|_H.$$

Схема доказательства теоремы 5 такая же, как и при доказательстве теоремы 1. Оно существенно использует независимость матрицы $Q(\lambda)$ от $t \in [0, T]$.

П р и м е р 4. Пусть в системе (1) $A = E$, $C = 0$, $B = \begin{pmatrix} 2t-T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда минимальный оператор для такой системы имеет неограниченный обратный в H. Этот пример подтверждает необходимость условия теоремы 5 о независимости знака $\operatorname{Re} \omega_j(t, \lambda)$ от $t \in [0, T]$ для всех $j = \overline{1, n}$.

Пусть теперь $\det A(t) \equiv 0$ для всех $t \in [0, T]$. Рассмотрим матричный пучок $L(t, \omega, \lambda) = \omega A(t) + \lambda B(t) + C(t)$, где $t \in [0, T]$, $\lambda \in \Lambda$, $\omega \in \mathbb{C}$.

Определение. Будем называть пучок $L(t, \omega, \lambda)$ равномерно регулярным по $t \in [0, T]$ на множестве Λ, если найдется число $\omega_0 = \omega_0(\lambda) \in \mathbb{C}$, при котором матрица $L(t, \omega_0, \lambda)$ обратима для всех $t \in [0, T]$, $\lambda \in \Lambda$, и такая невырожденная на Λ матрица $Q(\lambda)$, которая приводит матрицу $L^{-1}(t, \omega_0, \lambda) A(t)$ к жордановой форме для всех $t \in [0, T]$, $\lambda \in \Lambda$.

Приведем два вспомогательных результата о равномерно регулярных по t пучках $L(t, \omega, \lambda)$.

Лемма 1. Если пучок $L(t, \omega, \lambda)$ является равномерно регулярным по $t \in [0, T]$ на Λ, то для каждого его собственного значения $\omega(t, \lambda)$ алгебраическая и собственная кратности, а также все длины жордановых серий не зависят от $t \in [0, T]$.

Доказательство леммы 1 следует из равномерной регулярности по $t \in [0, T]$ пучка $L(t, \omega, \lambda)$ и того факта, что функция $[\omega_0(\lambda) - \omega(t, \lambda)]^{-1}$ является собственным значением матрицы $L^{-1}(t, \omega_0, \lambda) A(t)$.

Используя метод, аналогичный методу из [3] для постоянных матриц A, B, C, можно установить следующий результат.

Лемма 2. Если пучок $L(t, \omega_0, \lambda)$ равномерно регулярный по $t \in [0, T]$ на множестве Λ, то найдется такая невырожденная для всех $t \in [0, T]$, $\lambda \in \Lambda$, матрица $R(t, \lambda)$, что матрица $R(t, \lambda) L(t, \omega_0, \lambda) Q(\lambda)$ имеет некоторую квазидиагональную форму.

В [4] результат леммы 4 получен и при некоторых других условиях на пучок $L(t, \omega, \lambda)$.

Аналогично случаю постоянных матриц A, B, C введем числа $n_1(\lambda)$, $n_0(\lambda)$, $n_0 = \max n_0(\lambda)$, пространство H^{n_0-1} и оператор-матрицу Q_1^{-1}.

Замечание. При $C(t) \equiv 0$ числа ω_0, n_1, n_0 и матрицы Q, R, Q_1^{-1} не зависят от $\lambda \in \Lambda$.

В дальнейшем будем считать все элементы матриц $A(t)$, $B(t)$ и $C(t)$ $(n_0 - 1)$ раз непрерывно дифференцируемыми функциями $t \in [0, T]$. Из этого предположения следует, что матрица $R(t, \lambda)$ тоже является $(n_0 - 1)$ раз непрерывно дифференцируемой матрицей $t \in [0, T]$ при всех $\lambda \in \Lambda$. Обозначим через $\omega_j(t, \lambda)$ собственные значения пучка $L(t, \omega, \lambda)$. Для равномерно регулярного пучка $L(t, \omega, \lambda)$ количество $\omega_j(t, \lambda)$ не зависит от $t \in [0, T]$. Из условий гладкости на $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ следует, что во всяком случае все функции $\omega_j(t, \lambda)$ непрерывны по $t \in [0, T]$ для всех $\lambda \in \Lambda$.

Теорема 6. Пусть $\det A(t) \equiv 0 \; \forall t \in [0, T]$. Если матричный пучок $L(t, \omega, \lambda)$ является равномерно регулярным по $t \in [0, T]$ на спектре Λ, знак каждой $\operatorname{Re} \omega_j(t, \lambda)$ не зависит от $t \in [0, T]$, произведение норм матриц $Q(\lambda)$, $R(t, \lambda)$ ограничено при $t \in [0, T]$, $\lambda \in \Lambda$, и $f(t) \in H^{n_0-1}$, то при подходящем выборе параметра μ решение задачи (1), (4) существует, единственно и с некоторой постоянной $c_4 > 0$ удовлетворяет неравенству

$$\|u(t)\|_H \leqslant c_4 \|f(t)\|_{H^{n_0-1}}.$$

Доказательство теоремы 6 аналогично доказательству теоремы 3, если учесть доказательства леммы 1 и 2.

В заключение покажем на примере необходимость условия теоремы 6 о равномерной регулярности по $t \in [0, T]$ пучка $L(t, \omega, \lambda)$ на множестве Λ.

Пример 5. Пусть в системе (1) $C = 0$, $B = E$, $A(t) = \begin{pmatrix} 1+t, & -(1+t)^2 \\ 1, & -(1+t) \end{pmatrix}$. Для такой системы пучок $L(t, \omega, \lambda)$ не является равномерно регулярным по $t \in [0, T]$, так как в этом случае $Q = Q(t, \lambda)$. При этом однородная задача (1), (3) имеет, например, бесконечное множество решений вида $u_k(t) = v(t) \varphi_k \begin{pmatrix} 1+t \\ 1 \end{pmatrix}$, где $v(t)$ — любая непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[0, T]$, обращающаяся в нуль на его концах, т. е. ядро минимального оператора бесконечномерно.

1. *Дезин А. А.* Общие вопросы теории граничных задач.— М. : Наука, 1980.— 208 с.
2. *Романко В. К.* О системах операторных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения.— 1987.— 23, № 9.— С. 1574—1585.
3. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц.— М. : Наука, 1966.— 776 с.
4. *Бояринцев Ю. Е.* Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.— Новосибирск : Наука, 1980.— 222 с.

Моск. физ.-техн. ин-т Получено 14.10.91